Traitement du signal

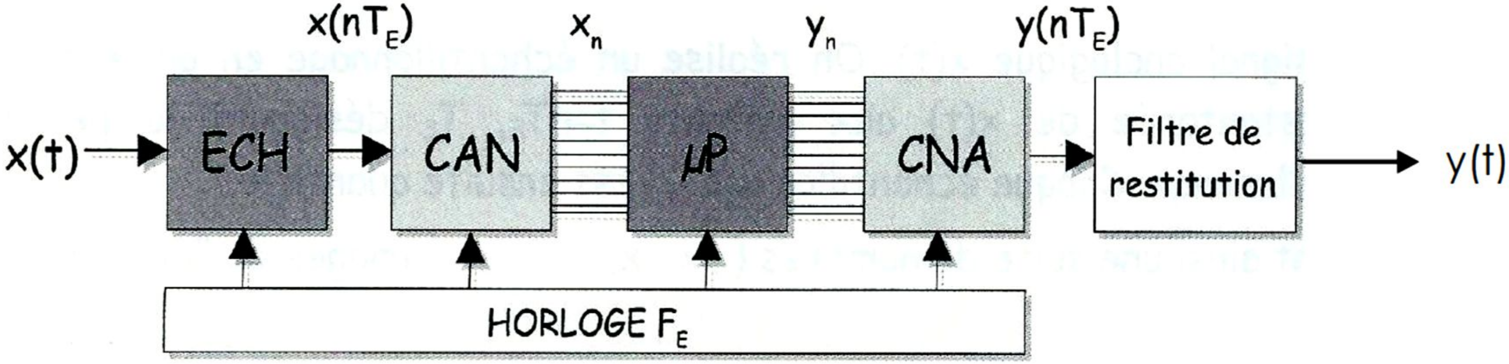
CHAPITRE 3

Electronique numérique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

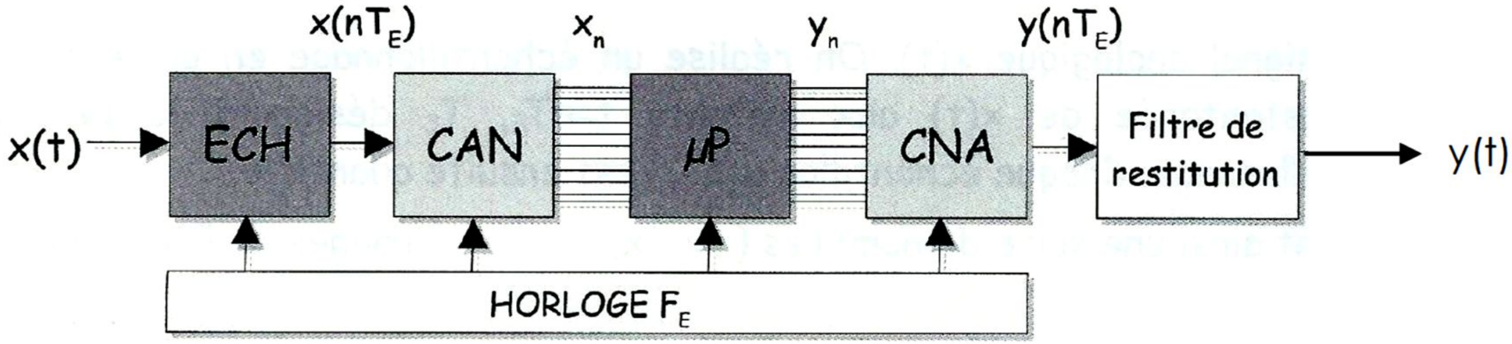
Architecture (1)

Le schéma synoptique ci-dessous décrit les différentes étapes du traitement numérique et de la restitution d'un signal analogique électrique :



❑ Le premier bloc représente l'échantillonnage, c'est-à-dire le choix de dates auxquelles prélever des **valeurs discrètes** au signal analogique (qui est **par définition continu**). T_E est la période d'échantillonnage du signal.

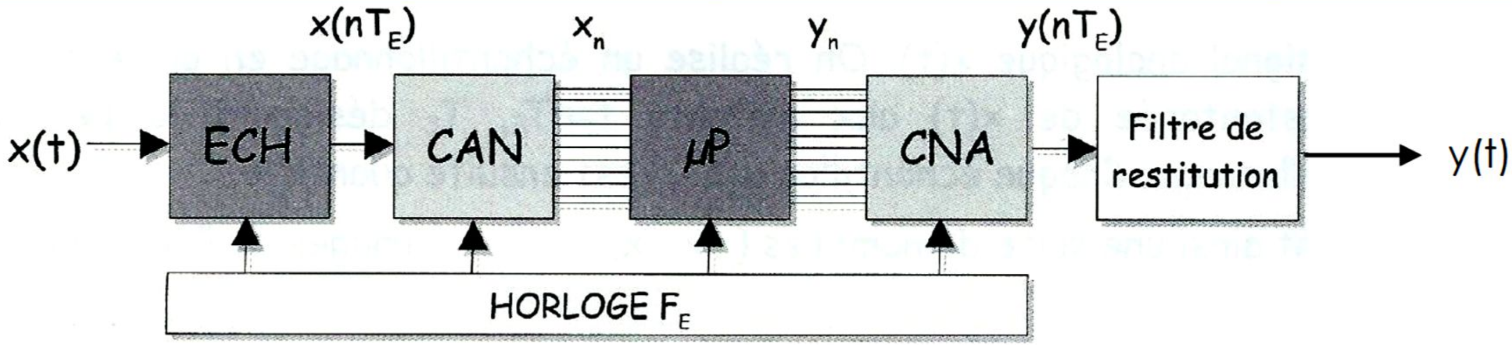
Architecture (2)



❑ Le deuxième bloc représente un convertisseur analogique-numérique qui permet d'associer un nombre binaire à une valeur du signal analogique. Ce sont ces nombres qui seront traités par la machine.

❑ µP représente le traitement numérique qui peut, par exemple, être un filtrage ou une analyse spectrale (ce qui correspond à notre programme de l'année).

Architecture (3)



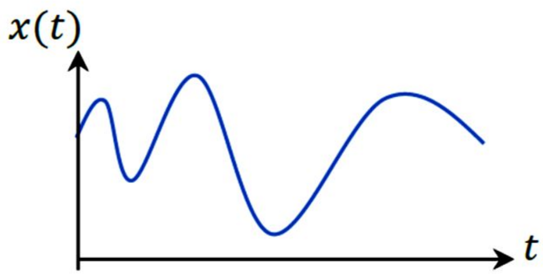
❑ Les valeurs binaires y_n obtenues sont à reconvertir en valeurs discrètes associées à des temps nT_E par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique – analogique (CNA).

❑ Il reste alors à réaliser l'opération inverse de l'échantillonnage, ce que réalise le filtre de restitution.

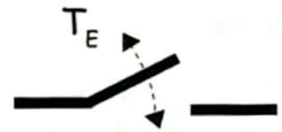
Les opérations précédentes sont cadencées par une horloge de fréquence F_E,où F_E correspond à la fréquence d'échantillonnage.

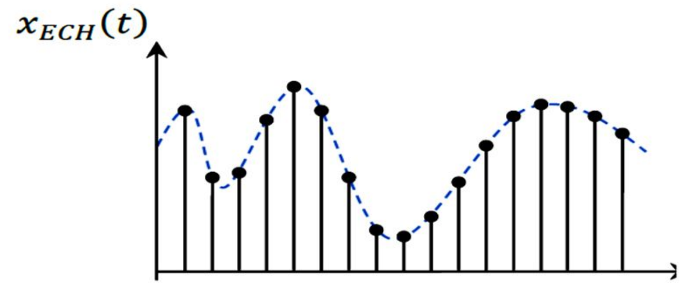
Echantillonnage

Principe de l'échantillonnage (1)



Signal analogique

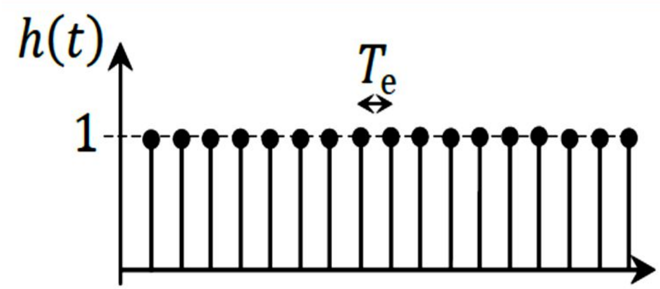




Signal échantillonné

L'idée consiste à utiliser **un interrupteur parfait** que l'on ferme pendant un intervalle de temps très court puis que l'on ouvre pendant T_E . **On prélève ainsi une valeur $x(nT_E)$ tous les T_E** . Si l'on considère pour simplifier que l'intervalle de temps T nécessaire au prélèvement est faible devant T_E , cela revient mathématiquement à multiplier $x(t)$ par la fonction :

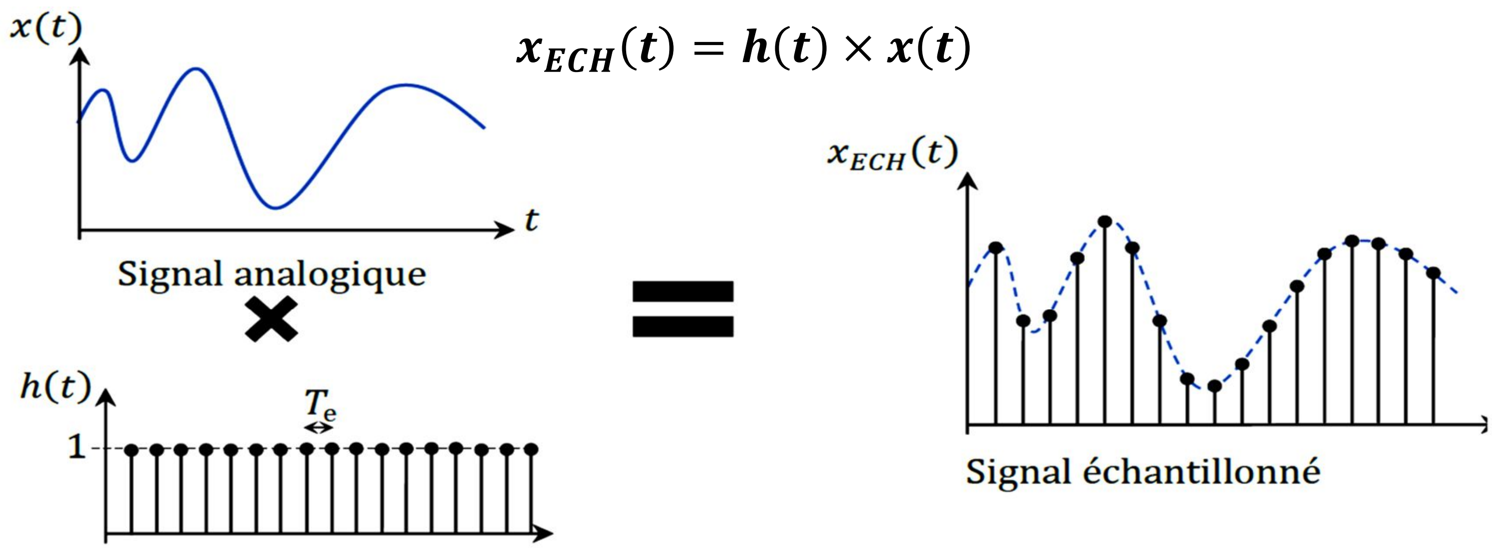
Principe de l'échantillonnage (2)



Peigne de Dirac

Faisons le produit « graphiquement » :

$$x_{ECH}(t) = h(t) \times x(t)$$



Principe de l'échantillonnage (3)

Le signal échantillonné peut donc être considéré comme une suite de valeurs discrètes de $x(t)$.

Avant d'indiquer quelles valeurs binaires on peut associer à x_{ECH} (voir Quantification), étudions le spectre de ce signal. Ce point est particulièrement important :

L'échantillonnage ne doit pas détériorer le signal. En particulier il doit conserver le spectre de $x(t)$ et il doit permettre de restituer ce spectre en fin d'opérations.

Spectre du signal échantillonné (1)

❑ Signal sinusoïdal

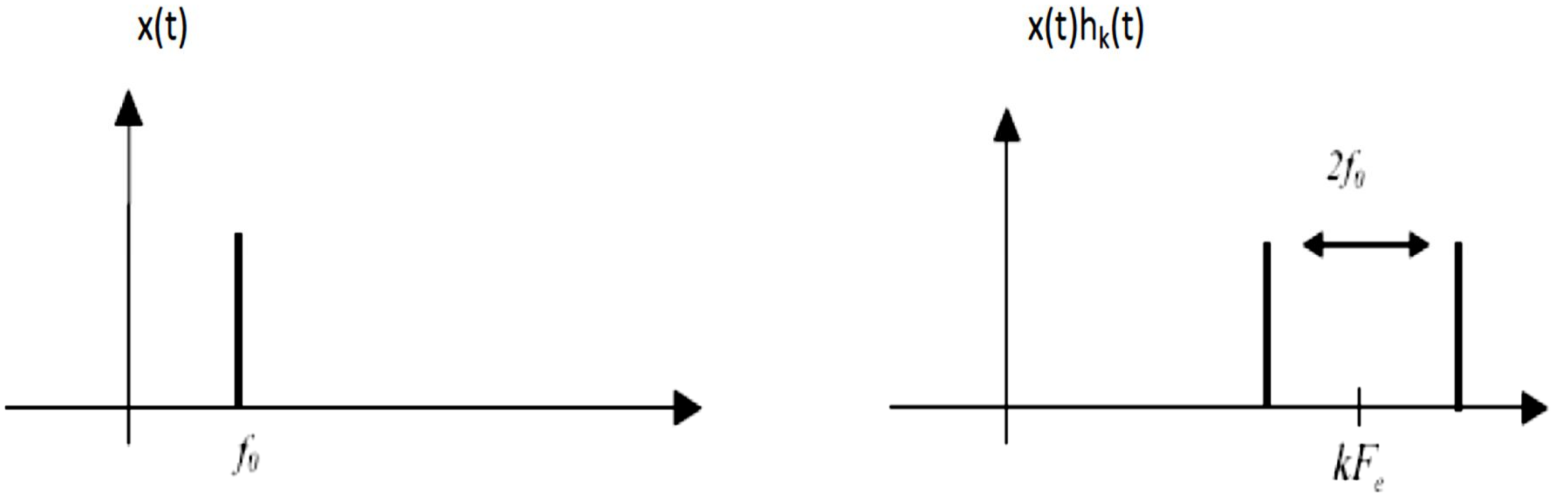
Supposons que $x(t)$ soit sinusoïdale de fréquence f_0. La fonction $h(t)$ étant périodique, elle est décomposable en série de Fourier sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_e} t\right)$$

Le produit de la fonction $x(t)$ de fréquence f_0 par l'harmonique de rang k de $h(t)$ fait apparaître les deux fréquences $kF_E + f_0$ et $kF_E - f_0$: en effet,

Spectre du signal échantillonné (2)

$$\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi k F_e t) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi(kF_E + f_0)t) + \cos(2\pi(kF_E - f_0)t)\right]$$

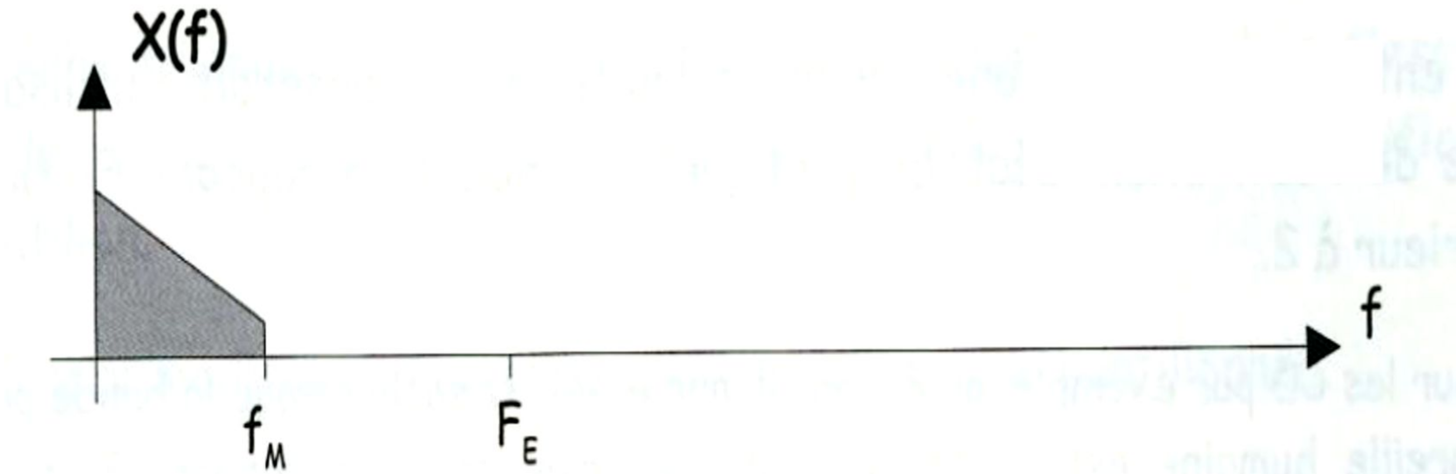


L'opération d'échantillonnage fait apparaître de nouvelles fréquences par rapport à $x(t)$: l'opération est non linéaire.

Spectre du signal échantillonné (3)

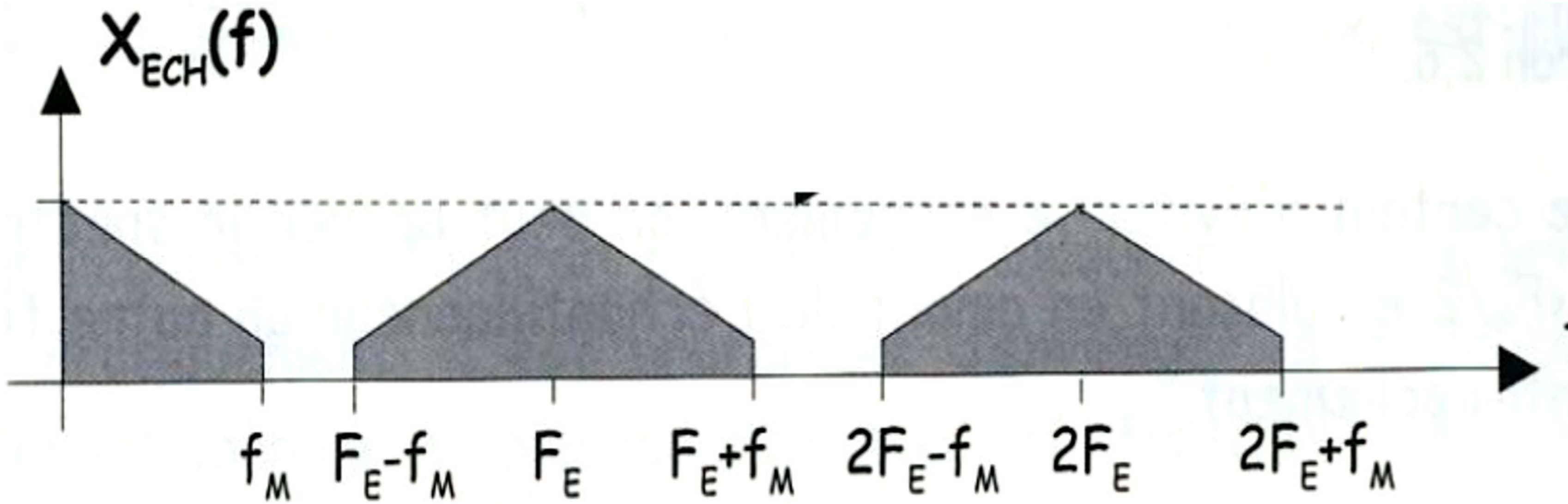
❑ Signal quelconque

Bien sûr un signal réel à traiter a un spectre fréquentiel continu entre deux valeurs extrêmes de fréquence ; sur le schéma ci-dessous les fréquences sont comprises entre 0 (continu) et f_M :



Spectre du signal échantillonné (4)

Le résultat en fréquence de l'échantillonnage est alors le suivant :



L'échantillonnage produit une reproduction du spectre autour des fréquences nF_E.

Spectre du signal échantillonné (5)

❑ Conclusions

Le spectre d'un signal périodique $x(t)$ échantillonné à la fréquence F_E comprend :

✓ des raies spectrales qui correspondent au fondamental et aux harmoniques du signal $x(t)$

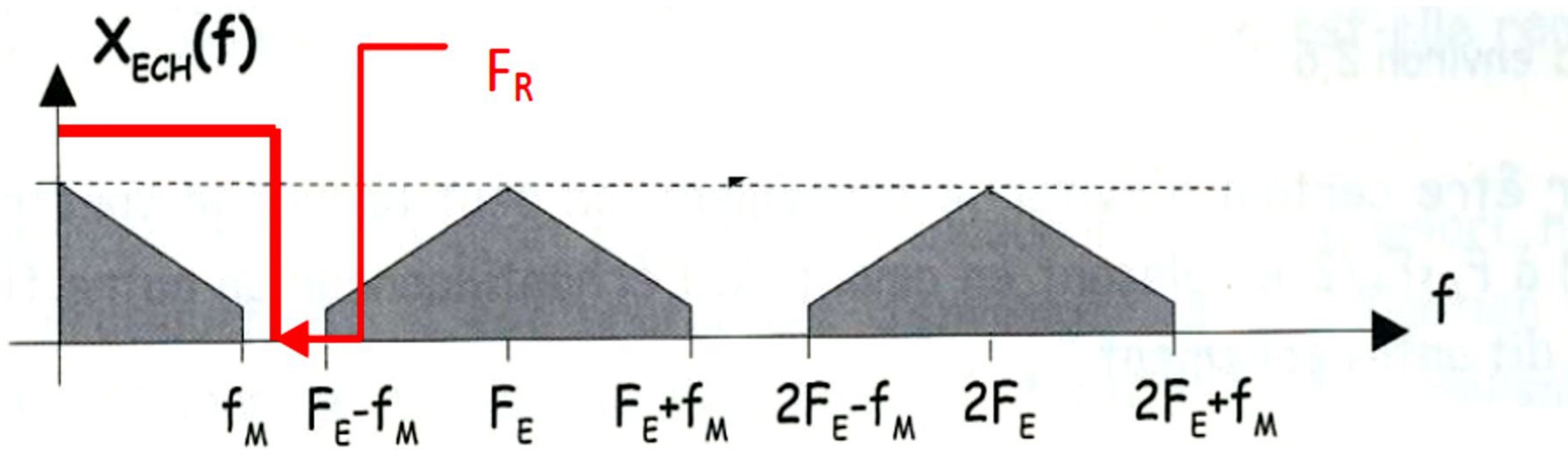
✓ des raies spectrales obtenues par la réplication des raies précédentes autour de la fréquence F_E

✓ des raies situées autour des valeurs multiples de F_E

Critère de Shannon-Nyquist (1)

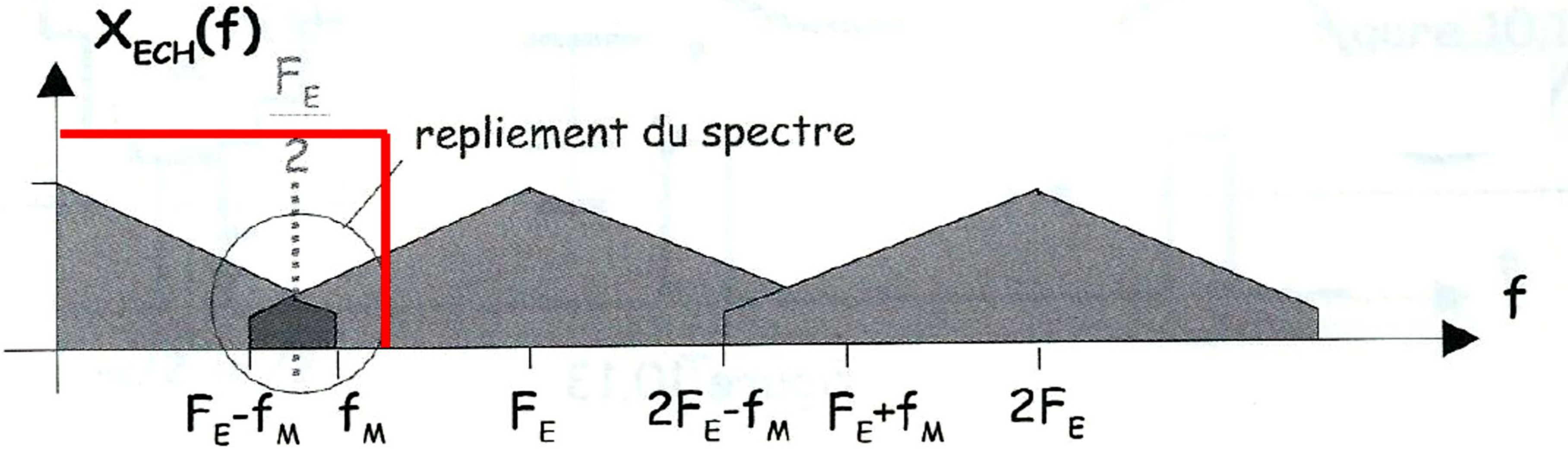
❑Repliement de spectre

Supposons que le microprocesseur µP réalise simplement $y_n = x_n$. Il faut que le filtrage de restitution (représenté par le filtre idéal rouge de fréquence de coupure F_R) redonne le spectre de $x_{ECH}(t)$, ce qui est le cas dans la configuration ci-dessous :



Critère de Shannon-Nyquist (2)

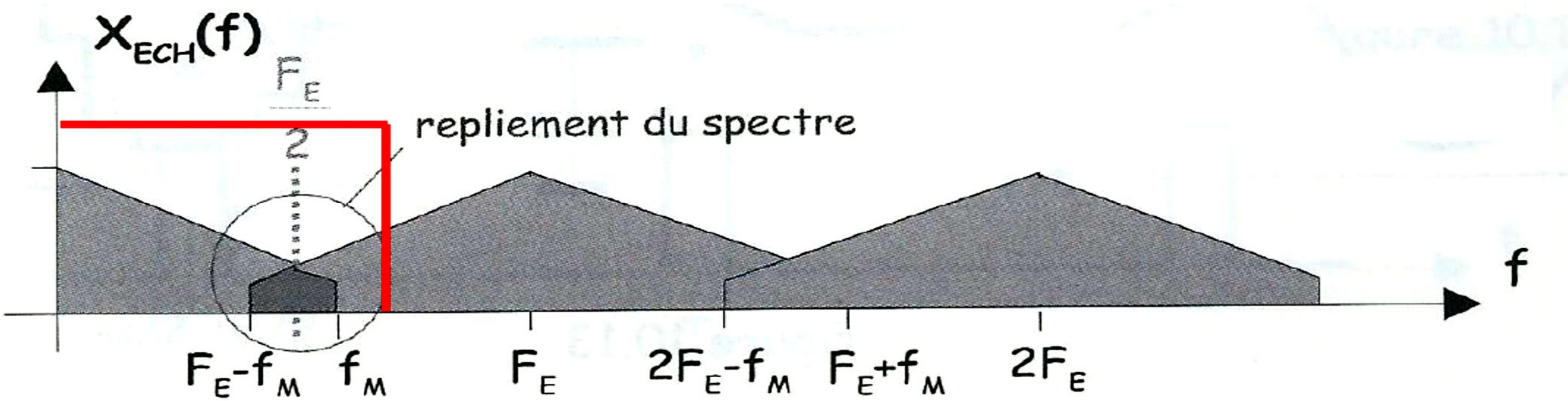
Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est mal choisie, i.e. si le signal est sous-échantillonné, on observera un enrichissement du spectre de $x_{ECH}(t)$:



Après filtrage de restitution vont apparaître les fréquences inférieures à F_R qui appartiennent à l'intervalle $[F_E - f_M; F_R]$.

Le phénomène porte le nom de REPLIEMENT.

Critère de Shannon-Nyquist (3)



Le graphe ci-dessus montre que **si la fréquence d'échantillonnage n'est pas au moins égale à deux fois la fréquence maximale de $x(t)$, il y aura présence de ces fréquences**. En effet pour que seules apparaissent les fréquences comprises entre 0 et f_M , **il faut que $F_E - f_M > f_M$**.

Critère de Shannon-Nyquist (4)

- ✓ **La fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la plus grande fréquence contenue dans le signal à traiter.**

$$\boxed{F_E > 2f_M}$$

- ✓ **Si le critère de Shannon-Nyquist n'est pas respecté il y a repliement du spectre et sous-échantillonnage.**

<u>Intérêt :</u>

Lorsqu'un signal est échantillonné en respectant le critère de Shannon, un simple filtrage passe-bas permet de retrouver le signal $x(t)$ d'origine à partir du signal échantillonné $x_{ECH}(t)$

Critère de Shannon-Nyquist (5)

Quelques données et remarques:

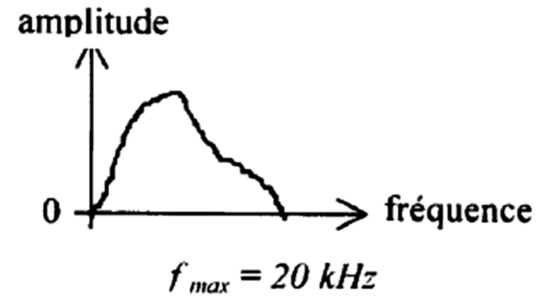
- Pour la restitution musicale, l'échantillonnage se fait à 44 kHz, sachant que l'oreille humaine est limitée en moyenne à 17 kHz ; le rapport F_E/f_M est alors environ égal à 2,6.
- En téléphonie, la bande passante est limitée à 3400 Hz ce qui est suffisant pour une conversation. La fréquence d'échantillonnage est de 8000 Hz, soit un rapport de 2,4 environ.
- Si le signal est sur-échantillonné $(F_E \gg 2f_M)$, l'échantillonnage prend beaucoup de temps et le stockage des valeurs échantillonnées demande beaucoup d'espace mémoire.

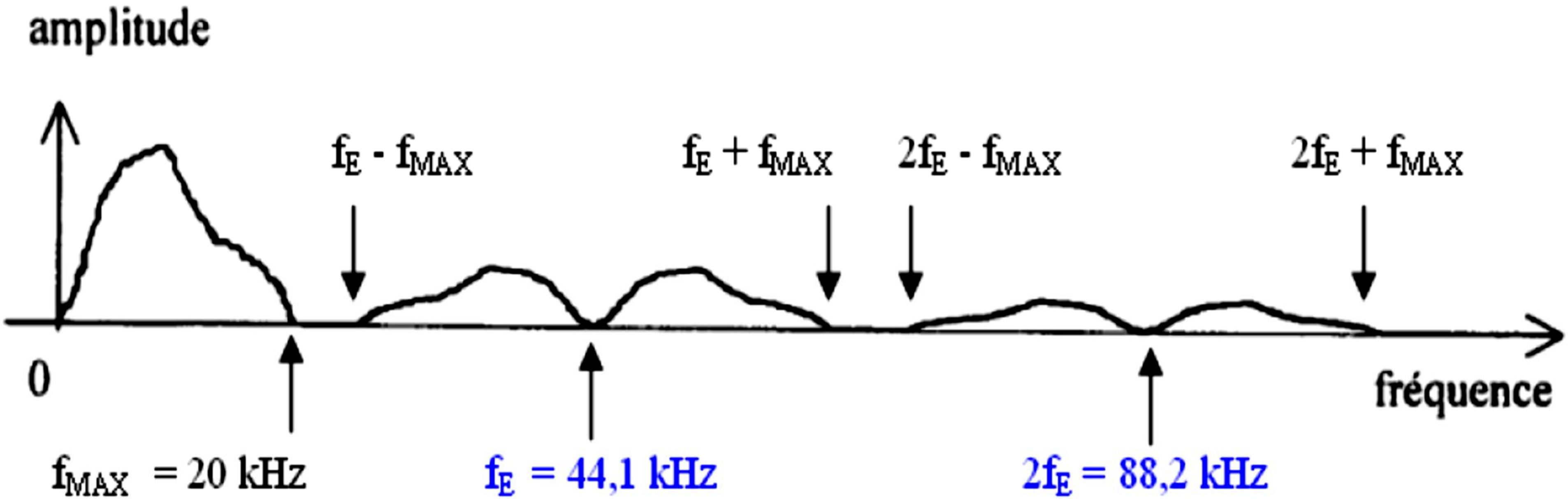
Critère de Shannon-Nyquist (6)

- En revanche, dans le cas d'un sous-échantillonnage, le signal reconstruit est erroné.
- **Dans chaque cas on prend donc une marge de sécurité par rapport au filtre de restitution**.
- Le repliement de spectre dû au non-respect de la condition de Shannon se traduit par **une perte d'information** sur le signal d'origine.
- Dans le cas où le spectre initial possède une fréquence maximale très élevée, on est obligé de filtrer le signal avant de l'échantillonner pour le limiter en fréquence : ceci est réalisé par un filtrage amont le filtre correspondant est dit « filtre anti-repliement »

Exemple d'un signal audio échantillonné à la qualité CD (1)

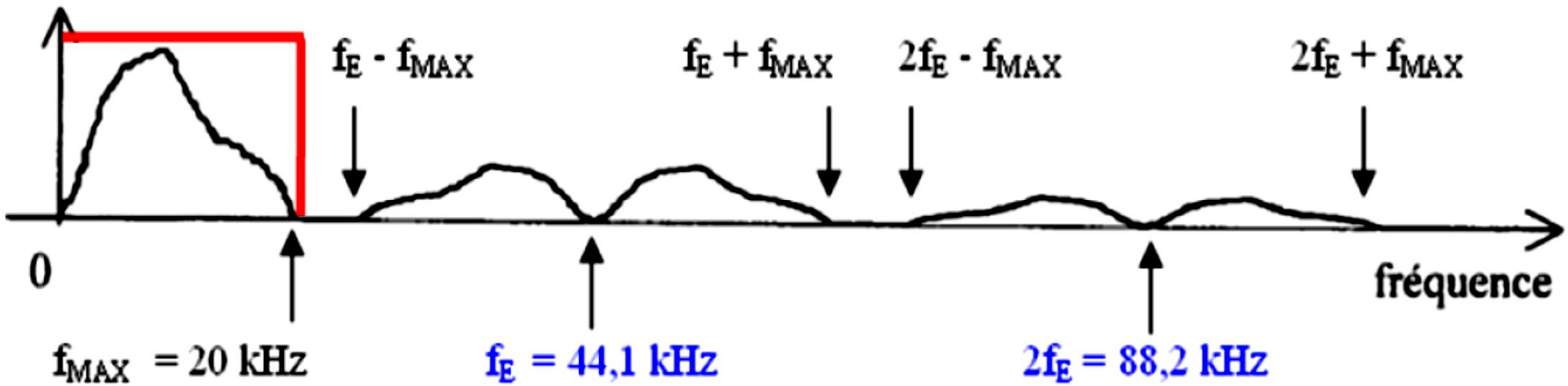
Le spectre du signal analogique s'étend jusqu'à 20kHz. On échantillonne à la fréquence $f_E = 44{,}1k\text{Hz}$





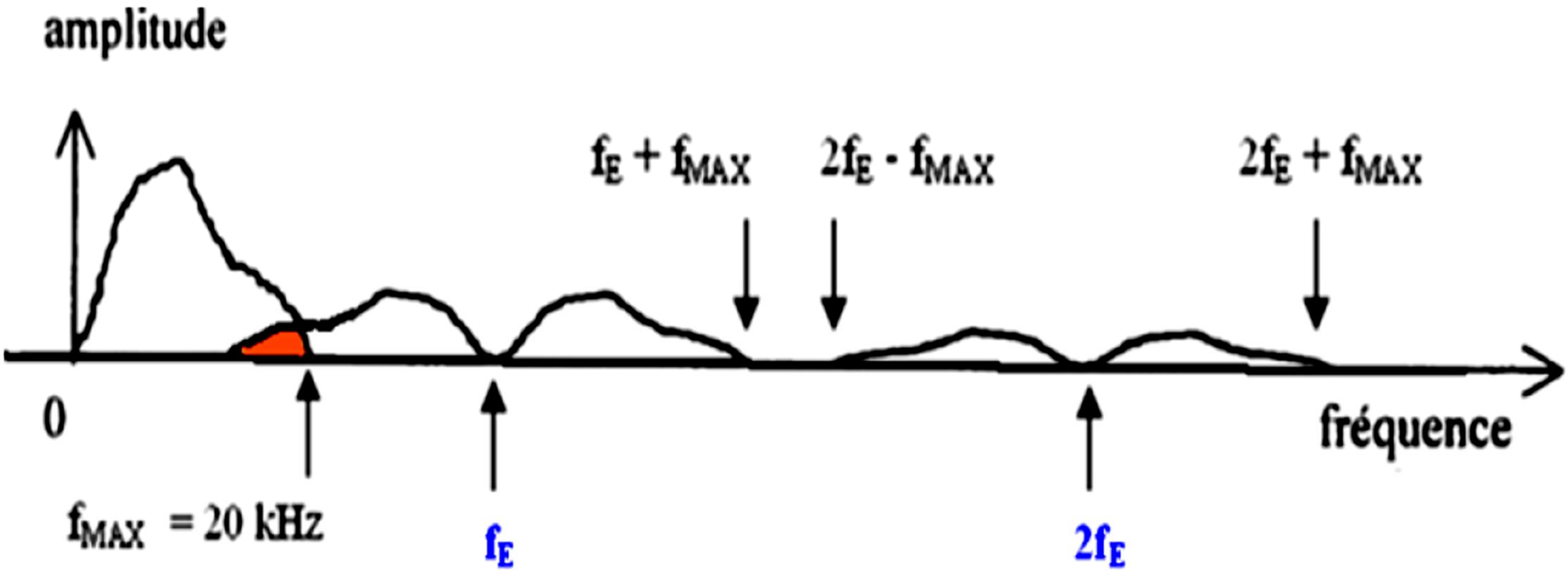
Exemple d'un signal audio échantillonné à la qualité CD (2)

Pour récupérer le signal audio original, il suffit d'effectuer un filtrage passe-bas.



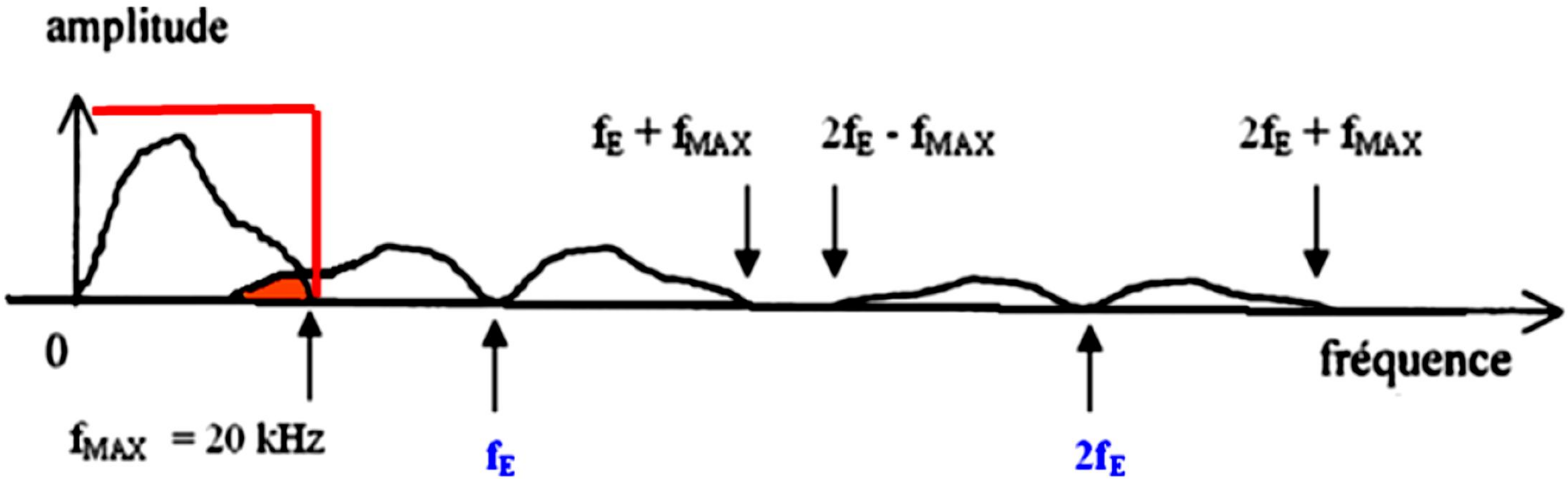
Que se passe-t-il si on diminue à présent la fréquence d'échantillonnage : $f_E < 40\ k\text{Hz}$ (Non respect de la condition de SHANNON)

Exemple d'un signal audio échantillonné à la qualité CD (3)



On voit que les spectres se chevauchent. **C'est ce qu'on appelle un repliement de spectre (Aliasing)**

Exemple d’un signal audio échantillonné à la qualité CD (4)



Si on effectue un filtrage passe bas, on récupère des fréquences indésirables (fausses images). Dans le cas d’un son sous échantillonné, on va entendre des « nouveaux sons », correspondant aux fréquences « repliées » (en orange sur le schéma).

Exemple d'un signal audio échantillonné à la qualité CD (5)

<u>**Conclusion**</u> : Pour éviter le phénomène du repliement, il est nécessaire de limiter la bande passante du signal à traiter à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, et ainsi de respecter la condition de SHANNON.

Cette limitation s'effectue à l'aide d'un filtrage passe-bas, inséré avant l'échantillonneur. (**Filtre anti-repliement = filtre anti-aliasing** = coupure à $f_E/2$)

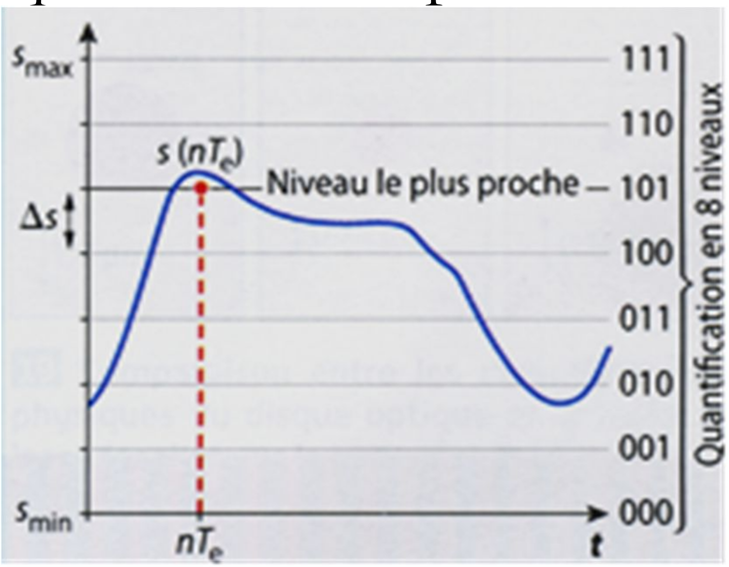
Quantification

Principe de quantification (1)

L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur prélevée au signal lors de l'échantillonnage. **C'est le CAN (convertisseur analogique numérique) qui réalise cette opération**. Chaque niveau de tension est codé sur p bits, chaque bit pouvant prendre deux valeurs (0 ou 1). Donc un convertisseur à p bits possède 2^p niveaux de quantification. Considérons un CAN 4 bits, il n'y a donc que $2^4 = 16$ valeurs possibles attribuables à toutes les valeurs prélevées lors de l'échantillonnage. **L'opération se fait donc avec une perte d'information d'autant plus grande que p est petit.**

Principe de quantification (2)

Cette perte d'information est illustrée dans l'exemple suivant. Dans une gamme $[s_{min}\ ;\ s_{max}]$ le **CAN** va faire appel à 2^p niveaux de quantification pour coder les valeurs du signal.



$N = 3$ bits, s_{min} correspond au niveau de quantification codé par 000 et s_{max} à celui codé par 111. Quantifier la valeur du signal analogique $s(nT_e)$, c'est définir un nombre binaire dont le niveau est le plus proche possible de $s(nT_e)$.

Ainsi le niveau le plus proche de $s(nT_e)$ correspond au nombre binaire 101. Ainsi, la quantification du signal analogique introduit une **perte d'information**.

Principe de quantification (3)

- Comme l'écart entre deux niveaux de quantification est

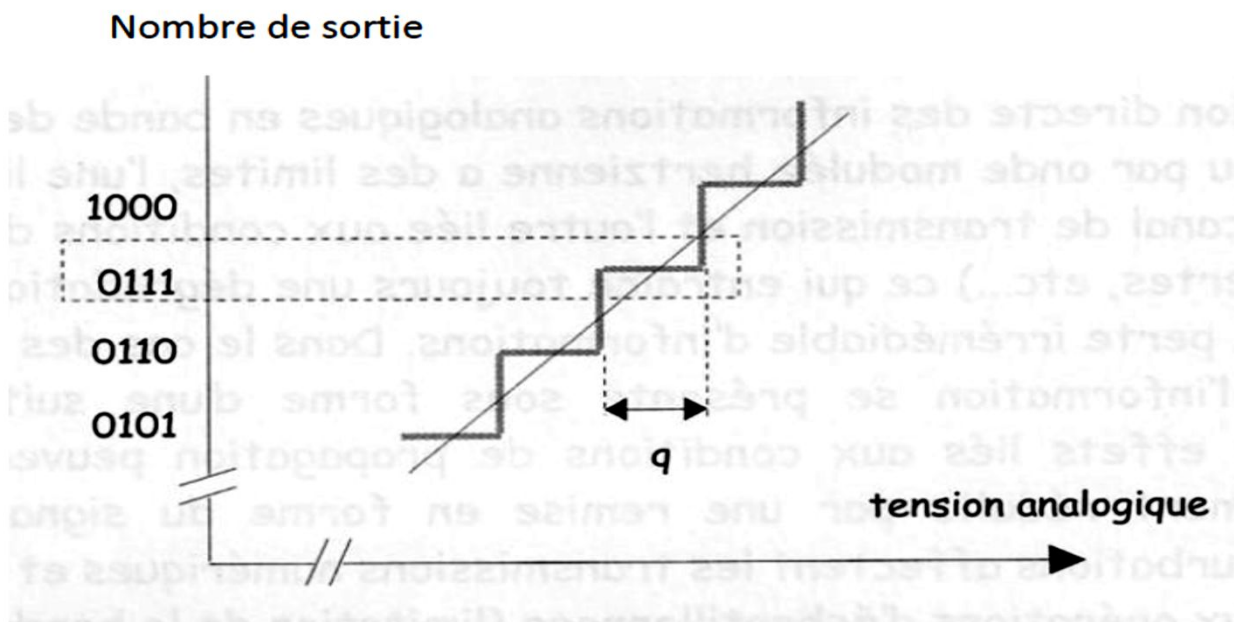
$$\Delta s = \frac{s_{max} - s_{min}}{2^p - 1}$$

plus p est grand, meilleure est la qualité de quantification.

- Si p est fixé, par construction du CAN par exemple, c'est $s_{max} - s_{min}$ qui doit être le plus faible possible. Pour **réduire la perte d'information lors de la numérisation**, l'utilisateur doit choisir, parmi celles possibles, la gamme $[s_{min}\ ;\ s_{max}]$ encadrant au plus près l'évolution du signal analogique.
- La quantité de nombres binaires possibles est appelée résolution R. Par définition : $\boldsymbol{R = 2^k}$, où k est le nombre de bits utilisé

Principe de quantification (4)

Le schéma ci-dessous représente une partie de la caractéristique de transfert d'un convertisseur 4 bits ; à tous les niveaux de tension d'un même palier, le convertisseur fait donc correspondre un seul et même nombre binaire :

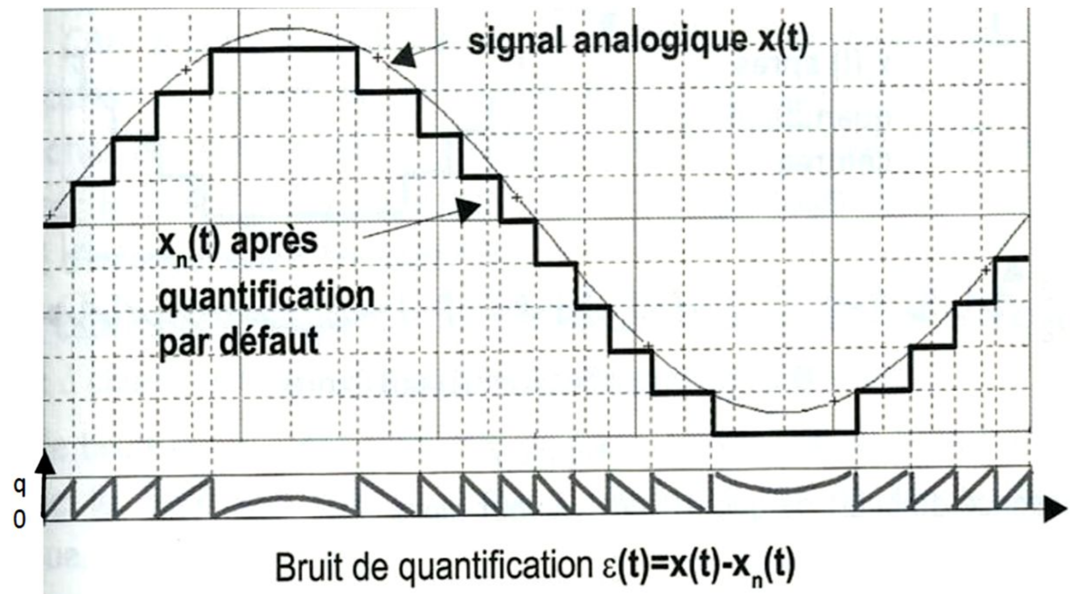


Caractéristique de transfert d'un CAN – Quantification à 4 bits

Principe de quantification (5)

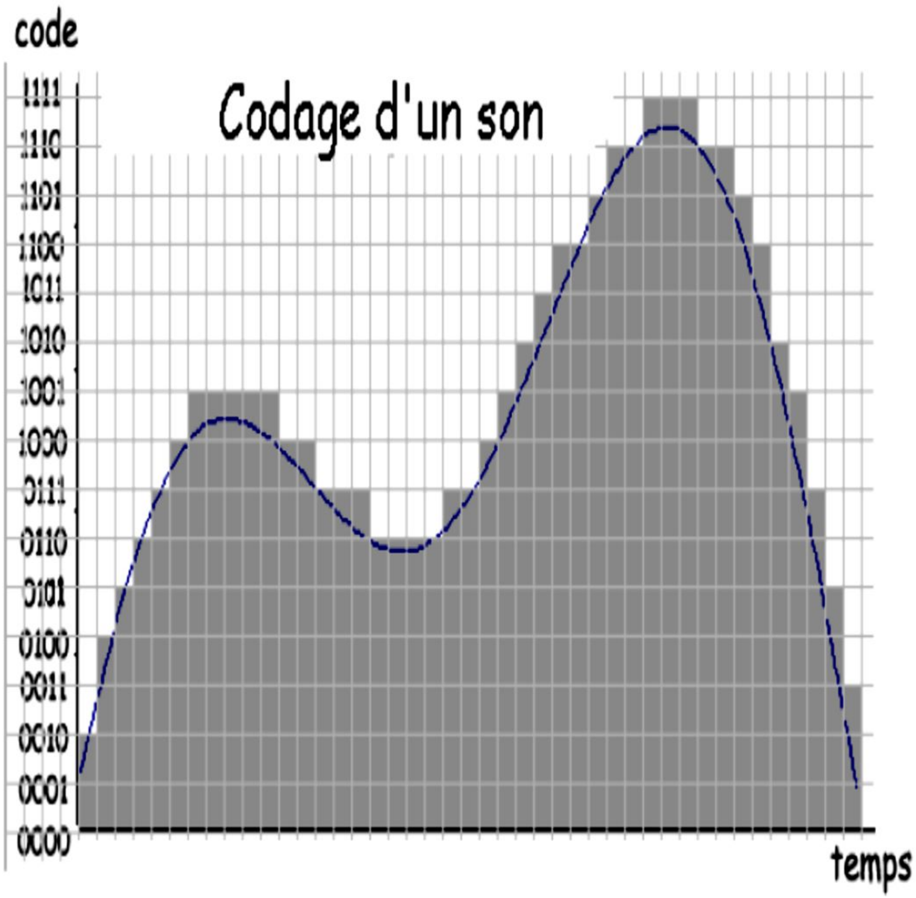
q est le pas de quantification (ou quantum) : il correspond à la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder. On voit bien que **plus q est faible, meilleure sera la précision de codage.**

Pour une quantification par défaut, où $x_n = nq$ si x est compris entre nq et $(n+1)q$, l'erreur commise appelée bruit de quantification est donnée par : $\boldsymbol{\varepsilon(t) = x(t) - x_n(t)}$



Principe de quantification (6)

Ex : *Numérisation d'un son*



Le code correspondant que reçoit l'ordinateur est donc :

0010, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1001, 1001, 1001, 1001, 1000, 1000, 0111, 0111, 0111, 0110, 0110, 0110, 0110...

Dans la réalité le codage se fait sur 8 bits = 1 octet (256 niveaux possibles) ou 16 bits = 2 octets (65736 niveaux possibles).

Signal et bruit

Il existe **une perte d'information** résultant d'une numérisation

- l'évolution du signal analogique original n'est pas transcrite entre 2 instants d'échantillonnage.
- du fait de l'existence d'un quantum q, 2 valeurs voisines d'échantillon peuvent être converties en un même nombre appelée **bruit de quantification**.

mais il est compensé par des ***avantages***

- une fois la conversion effectuée, la transmission et le stockage du signal numérique peuvent s'effectuer sans plus d'altération du signal (ce sont des nombres !!)
- le bruit de quantification est connu ou tout au moins majoré.
- le traitement d'un signal numérisé est une opération facile et parfaitement contrôlée

Filtre numérique

Introduction

Un filtrage numérique n'utilise pas de **composants physiques tels que résistance, condensateur ou inductance, mais est effectué par des calculs à l'aide de circuit intégré, de processeur programmable ou d'un logiciel dans un ordinateur**.

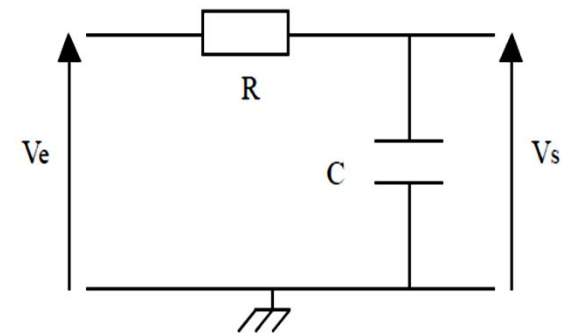
Ces opérations mathématiques peuvent être effectuées soit dans le domaine temporel directement sur les échantillons prélevés, ou encore dans le domaine fréquentiel, après avoir effectué une FFT.

Filtre numérique passe-bas du 1er ordre : méthode d'Euler

Filtre analogique passe-bas du premier ordre

Le filtre suivant est un filtre analogique passe-bas du premier ordre, de fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$



ω_c est la pulsation de coupure

L'équation différentielle associée est:

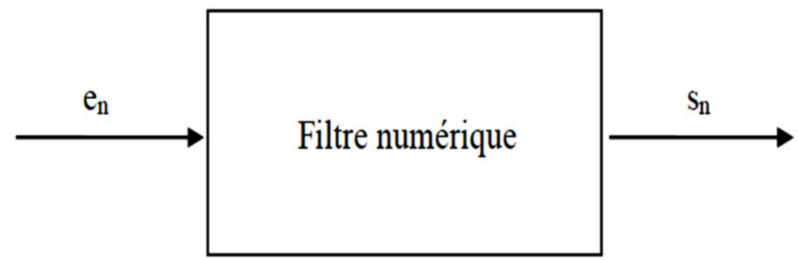
$$\tau\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

avec $\tau = 1/\omega_c$

Passage au filtre numérique par la méthode d'Euler : algorithme numérique de calcul (1)

Une fois un signal d'entrée numérisé, son traitement s'effectue par un calculateur, qui génère la suite des valeurs s_n du signal de sortie à partir des valeurs $e_n = e(t = nT_e)$ du signal d'entrée (T_e étant la période d'échantillonnage).

Pour ce faire, on utilisera ici la méthode d'Euler, technique qui permet d'établir une équation récurrente $s_n = f(s_{n-1}, e_n)$, à partir de l'équation différentielle, en utilisant la correspondance :



$$\boxed{\frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e}}$$

Passage au filtre numérique par la méthode d'Euler : algorithme numérique de calcul (2)

L'équation donnant la suite des valeurs s_n est alors:

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t) \Rightarrow \boldsymbol{\tau \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e} + s_n = e_n}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{s_n = \frac{\alpha}{1+\alpha} s_{n-1} + \frac{1}{1+\alpha} e_n}$$

avec

$$\alpha = \frac{\tau}{T_e} = f_e \tau = f_e \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi} \frac{f_e}{f_c}$$

*Les coefficients dans l'algorithme obtenu ne dépendent donc que du rapport des deux fréquences caractéristiques du problème (**fréquence d'échantillonnage** et **fréquence de coupure du filtre**).*

Passage au filtre numérique par la méthode d'Euler : algorithme numérique de calcul (3)

- Pour $f_c = 1$ kHz **et** $f_e = 10$ kHz**,** on obtient:

$$\Rightarrow \boldsymbol{s_n = 0,614\, s_{n-1} + 0,386 e_n}$$

- Pour $f_c = 1$ kHz **et** $f_e = 100$ kHz**,** on obtient:

$$\Rightarrow \boldsymbol{s_n = 0,941\, s_{n-1} + 0,059 e_n}$$

Réponse à un échelon de tension

L'entrée est un échelon de tension de hauteur unité, c'est-à-dire : $e_n = 0$ pour $n < 0$, et $e_n = 1$ pour $n \geq 0$.

On veut réaliser un filtre de fréquence de coupure égale à 1 kHz. Par le filtrage numérique :

On échantillonne à une fréquence d'échantillonnage égale à 100 kHz (période d'échantillonnage $T_e = 0{,}00001\, s$). L'algorithme à utiliser est donc : $s_n = 0{,}941\, s_{n-1} + 0{,}059 e_n$.

En prenant en compte les valeurs initiales, on peut établir toutes les valeurs discrètes en sortie du filtre. On peut écrire un code Python pour réaliser ces calculs. Les valeurs discrètes obtenues sont très proches de celles obtenues en traitement analogique.

Filtre numérique passe-bas à moyenne glissante

On réalise un filtre à moyenne glissante : le signal de sortie s_n est la moyenne des quatre derniers échantillons du signal d'entrée:

$$s_n = \frac{e_n + e_{n-1} + e_{n-2} + e_{n-3}}{4}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas, car si le signal d'entrée est une constante, alors le signal de sortie sera aussi constant (et identique au signal d'entrée). Ce filtre réalise une moyenne, qui conserve la composante continue.

Filtres d'ordre supérieur

Discrétisation

On peut étendre la technique de discrétisation à des dérivées d'ordre supérieur en utilisant la méthode d'Euler.

Par exemple pour l'ordre 2 on utilise la correspondance suivante :

$$\boxed{\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} \approx \frac{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}{T_e^2}}}$$

Synoptique complet

Exemple: Signal sonore

Le synoptique complet du traitement d'un signal analogique (sonore en l'occurrence) lors de sa numérisation, de son traitement numérique et de sa restitution est illustrée par le schéma suivant :